Matematica VS. Fisica: Civil War

Francesca Anceschi(*), Salvatore Caruso(*), Lorenzo Diazzi(*),
Giorgia Franchini(*) e Mathilde Galinier(*),

(*) Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche, Modena

UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

HiPeRT Lab High-Performance Real-Time Lab

OASIS Optimization Algorithms and Software for Inverse problemS

www.oasis.unimore.it

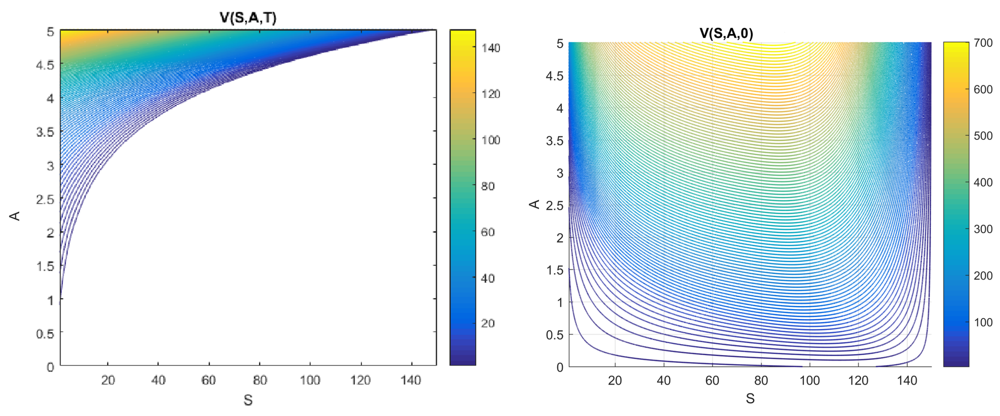
Analisi Numerica: Pricing di Opzioni Asiatiche con Barriera

Le opzioni sono un tipo di derivato finaziario scambiato nei mercati di tutto il mondo, ne esistono di vari tipi, prenderemo in considerazione quelle put di tipo asiatico con barriera. Essenzialmente un opzione è un contratto tra due parti che conferisce al compratore dell'opzione il diritto, ma non l'obbligo, di vendere un certo asset finanziario (detto *sottostante* ed il cui valore è indicato con S) ad un prezzo fissato (detto *strike price*) allo scadere di una certa data (detta *expiration date* ed indicata con T).

Anche questo contratto può essere scambiato sul mercato ed è quindi importante valutarne il prezzo. Indicando con V il prezzo dell'opzione ed assumendo che vari con S, con il tempo t e con la media geometrica A di S, rispetto all'ntervallo di tempo $[0, T]$, esiste una p.d.e. che modellizza l'andamento di $V(S, A, t)$ una volta noto il valore dell'opzione all'expiration date $V(S, A, T)$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \log(S)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0 \qquad \begin{array}{l} S \in \mathbb{R}^+ \\ A \in \mathbb{R} \\ t \in [0, T) \end{array}$$

Risolvere l'equazione analiticamente è molto complicato e diventa praticamente impossibile se si aggiunge una *barriera knock-out* B, una garanzia per chi vende l'opzione: si stabilisce una soglia e nel caso questa venga raggiunta o superata da S si annulla l'opzione ($V(S, A, t) = 0$ se $S \geq B$). In questo caso è necessario utilizzare un modello numerico che discretizzi la p.d.e. e poi tramite un calcolatore vada a stimare $V(S, A, 0)$, cioè il valore dell'opzione oggi ($T = 0$).



Meccanica Statistica del non equilibrio

La Meccanica Statistica, insieme con la Meccanica Quantistica, ci permette di comprendere i fenomeni macroscopici in termini della dinamica microscopica soggiacente. Inizialmente concepita per descrivere sistemi in equilibrio termodinamico, la Meccanica Statistica deve oggi aggiornare il suo apparato matematico al fine di permettere lo studio di fenomeni di non equilibrio, come la conduzione del calore o il passaggio di corrente elettrica. Questi problemi sono estremamente rilevanti non solo per il loro interesse teorico, ma anche perché tecnologie emergenti come le nanotecnologie e le bio-nanotecnologie si basano su fenomeni che avvengono in condizioni di forte non equilibrio. Studiando modelli che permettono di simulare l'evoluzione di sistemi di molte particelle interagenti:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i = F_{int} + F_{ext} - \alpha p_i \end{cases}$$

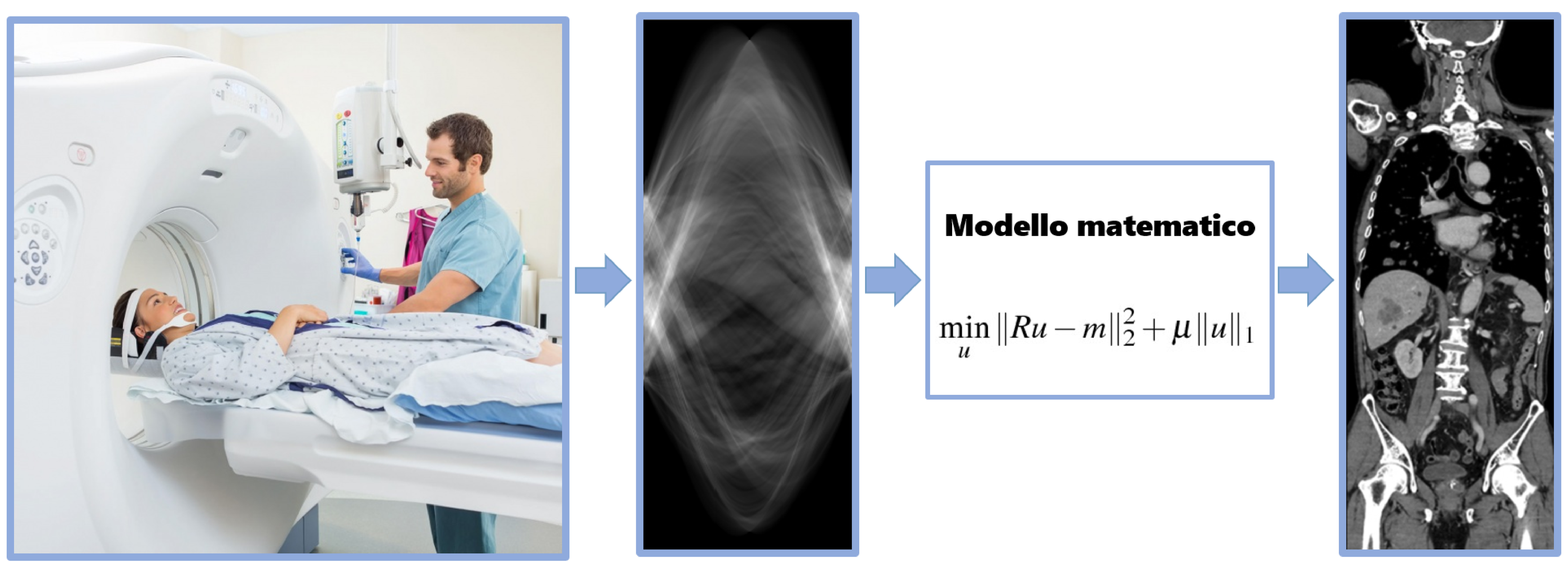
e integrando tali modelli con concetti provenienti dalla Teoria dei Sistemi Dinamici, è stato possibile introdurre una funzione matematica che misura il grado di non equilibrio di un sistema ed estende quindi la Seconda Legge della Termodinamica. Tale oggetto prende il nome di *Funzione di Dissipazione* ed estende il concetto di Entropia termodinamica. Il comportamento di tale funzione è descritto da un teorema - detto *Teorema di Fluttuazione*- che mostra come la probabilità che la Funzione di Dissipazione (e quindi l'Entropia) sia positiva, divisa per la probabilità che sia negativa, cresce esponenzialmente col tempo.

$$\frac{\mu_0\left(\bar{\Omega}^{f_0}_{0,T}\big|_{(A)_\delta}\right)}{\mu_0\left(\bar{\Omega}^{f_0}_{0,T}\big|_{(-A)_\delta}\right)} = e^{T[A+\epsilon(A,T,\delta)]} \qquad \text{con: } |\epsilon(A,T,\delta)| \leq \delta$$

Imaging biomedico: matematica in aiuto della medicina

Al giorno d'oggi, la matematica svolge un ruolo chiave per la medicina, in particolare per quanto riguarda l'imaging biomedico. Dalla registrazione d'immagini all'intelligenza artificiale, passando per problemi inversi e metodi di ottimizzazione, tanti algoritmi vengono creati e messi a disposizione della comunità medica per aiutare a compiere diagnosi e permettere una conoscenza sempre migliore delle varie patologie.

La TAC da vicino



(1) (2) (3) (4)

La Tomografia Assiale Computerizzata (TAC, oppure CT in inglese) è un esame radiologico che consente di esaminare ogni parte del corpo per la diagnosi e lo studio di numerose patologie. In pratica, un tubo radiogeno (1) emette fasci di raggi X in direzione dell'aera interessata (per esempio, l'addome). I dati raccolti dallo strumento di misura (2) vengono successivamente rielaborati grazie a programmi informatici, basati su un modello matematico (3). Tale processo permette di ricostruire un'immagine chiara dell'interno del corpo, cioè una cartografia precisa dell'area interessata dove si posso distinguere i diversi tipi di tessuti. Quando i dati raccolti sono incompleti, il modello matematico non è più sufficiente per ricavare una ricostruzione interpretabile. Per fortuna, l'intelligenza artificiale può aiutare a migliorare i risultati!

Equazioni alle Derivate Parziali

L'analisi matematica e le Equazioni alle Derivate Parziali (PDE) sono solitamente considerate come entità astratte senza alcuna applicazione pratica interessante. In realtà, esse sono strumenti molto utili per rappresentare, modellare e quindi capire numerosi fenomeni del mondo reale.

- **Problemi fisici** (propagazione del suono o del calore, meccanica dei fluidi, meccanica quantistica e relatività...);
- Modelli matematici in campo **biomedico** (dinamica delle popolazioni, crescita di cellule nei tumori,..);
- Modelli matematici per i **mercati finanziari** (modello di Black-Scholes).

La teoria della regolarità

Non esiste una teoria universale per la risoluzione delle PDE, di conseguenza la ricerca scientifica si è concentrata sullo sviluppo di **metodologie ad hoc** per equazioni di rilevante interesse matematico e fisico, come ad esempio l'**equazione cinetica**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(v,x,t) + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(v,x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(v,x,t) = f(v,x,t).$$

Un problema si dice **ben posto** se ammette una soluzione, tale soluzione è unica e dipende in modo continuo dai dati del problema (una variazione piccola a piacere nei dati del problema ha conseguenze altrettanto piccole sulla soluzione).

Una **soluzione forte** per una PDE di ordine k ($k = 2$ nell'esempio) è una funzione differenziabile fino all'ordine k, per la quale tutte le derivate esistono e sono continue. Tuttavia, la maggior parte delle PDE non ammette soluzioni classiche. Come risolvere questo problema?

L'idea di fondo è considerare una versione debole del problema di partenza, dove le soluzioni considerate sono funzioni meno regolari delle soluzioni forti e per questo chiamate **soluzioni deboli**. É intuitivo considerare che imponendo condizioni meno restrittive alla soluzione il problema diventa di più semplice risoluzione ed è anche vero che

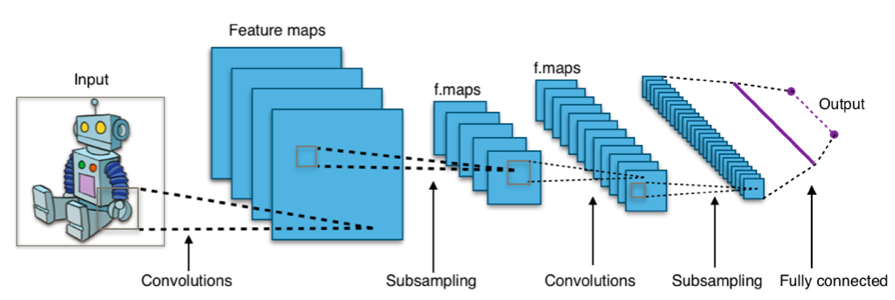
SOLUZIONE PROBLEMA FORTE $\Longrightarrow$ SOLUZIONE PROBLEMA DEBOLE .

Infine esistono casi in cui la soluzione debole trovata è sufficientemente regolare da poter essere considerata classica (**TEORIA DELLA REGOLARITÁ**).

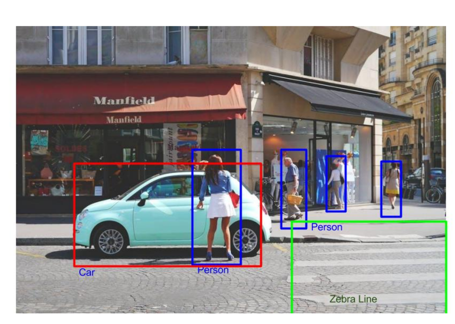
Autonomous driving e biologia

Le reti neurali convolutive per il riconoscimento degli oggetti stradali

La matematica in questi ultimi anni è riuscita ad unire il mondo della biologia con quello dell'intelligenza artificiale.



Le reti neurali artificiali traggono ispirazione proprio dai processi celebrali e vengono massicciamente utilizzate per il riconoscimento degli oggetti stradali: pedoni, semafori, altri veicoli, marciapiedi...



Un buon riconoscimento degli oggetti che coinvolgono le decisioni alla guida è il primo passo verso la guida autonoma.